8. Специјални типови оператора

У раду са операторима, као и у раду са комплексним бројевима, чији су ови аналогони (видети доле), јављају се посебни видови оператора који, осим тога што дају увид у структуру скупа свих оператора над неким апстрактним простором, олакшавају и рад са самим операторима.

8.1. Несингуларни, адјунговани, ермитски и аутоадјунговани оператори

Пре излагања материје о одређеним специјалним типовима оператора, биће наведено једно својство оператора које је особина пресликавања уопште.

Дефиниција 8.1. Нека је $\mathbb{U}$ унитарни простор над пољем $\mathbb{F}$, и нека је $\hat{A} \in \mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$. Ако је оператор $\hat{A}$ пресликавање $1-1$, онда је оператор $\hat{A}$ *несингуларан* (*регуларан*) *оператор*. Оператор је *сингуларан* ако не представља пресликавање $1-1$.

Дакле, несингуларан оператор $\hat{A}$ сваком елементу $|v\rangle \in \mathbb{U}$ придружује један и само један елемент $|\tilde{v}\rangle \in \mathbb{U}$ на такав начин да при томе сваком елементу $|\tilde{v}\rangle \in \mathbb{U}$ одговара само један елемент $|v\rangle \in \mathbb{U}$ такав да је

$$|\tilde{v}\rangle = \hat{A}|v\rangle . \tag{8.1}$$

Теорема 8.1. Оператор $\hat{A}$ *несингуларан* је ако и само ако сваки линеарно независни скуп вектора из унитарног простора $\mathbb{U}$ преводи у линеарно независни скуп вектора у простору $\mathbb{U}$.

Доказ.

Нека је $\hat{A}$ несингуларан оператор и нека је $\{|v_i\rangle\}$ линеарно независан скуп елемената из $\mathbb{U}$. Да би скуп $\{\hat{A}|v_i\rangle\}$ био линеарно независан морају сви коефицијенти

α_i у линеарној комбинацији $\sum_i \alpha_i \hat{A}|v_i\rangle = |0\rangle$ бити једнаки нули. Због линеарности оператора $\hat{A}$ је

$$\hat{A}\left(\sum_i \alpha_i |v_i\rangle\right) = |0\rangle$$

те, пошто је оператор $\hat{A}$ према **дефиницији 8.1.** пресликавање $1-1$, он само један (нулти) вектор преводи у нулти вектор, те је

$$\sum_i \alpha_i |v_i\rangle = |0\rangle .$$

Одавде следи, на основу линеарне независности скупа $\{|v_i\rangle\}$, да је $\alpha_i = 0$, $\forall i$.

А сада мало обрнуто, нека оператор $\hat{A}$ преводи линеарно независан скуп вектора у линеарно независан скуп вектора. Тада из $|v\rangle \in \mathbb{U}$ и $|v\rangle \neq |0\rangle$ и тога да важи $\alpha|v\rangle = |0\rangle$ следи да је $\alpha = 0$. Како је »скуп« $\hat{A}|v\rangle$ линеарно независан, сигурно је да је $\hat{A}|v\rangle \neq |0\rangle$, јер је нулти елемент увек линеарно зависан (за њега је увек $\alpha = 0$).

Дакле, јасно је да под датим условима, оператор $\hat{A}$ преводи само нулти елемент у нулти, те је то пресликавање $1-1$; наиме, пошто из $\hat{A}|v_1\rangle = \hat{A}|v_2\rangle$ следи да је $\hat{A}(|v_1\rangle - |v_2\rangle) = |0\rangle$, а како оператор $\hat{A}$ само нулти елемент преводи у нулти, онда је $|v_1\rangle - |v_2\rangle = |0\rangle$, илити $|v_1\rangle = |v_2\rangle$. Значи да оператор $\hat{A}$ стварно представља пресликавање $1-1$, те на основу **дефиниције 8.1.** то значи да је он несингуларан оператор.

Q.E.D.

Дакле, за прелазак из једног линеарно независног скупа у други (за прелазак из једног базиса у други, видети **потпоглавље 13.1**) користе се несингуларна пресликавања (несингуларни оператори) $\hat{T}$, који (изабрани тако да одржавају структуру, тј. да буду изоморфизми, **дефиниција 1.10**) индукују изоморфизам алгебри оператора одговарајућег простора трансформацијом сличности (**теорема 7.1**), те би оператор $\hat{A}$ у полазном базису $\{|v_i\rangle\}$ био представљен матрицом $\mathscr{A}$, док би му у свим осталим базисима $\{|\tilde{v}_i\rangle = \hat{T}|v_i\rangle\}$ (видети **13.1**, нарочито **теорему 13.2**) одговарале матрице дате следећом формулом

$$\tilde{\mathscr{A}} = \mathscr{T}\mathscr{A}\mathscr{T}^{-1}.$$

Детерминанта горњег израза гласи

$$\begin{aligned}\det\tilde{\mathscr{A}} &= \det\left(\mathscr{T}\mathscr{A}\mathscr{T}^{-1}\right) = \det\mathscr{T}\det\mathscr{A}\det\mathscr{T}^{-1} = \det\mathscr{A}\det\mathscr{T}\det\mathscr{T}^{-1} \\ &= \det\mathscr{A}\det\left(\mathscr{T}\mathscr{T}^{-1}\right) = \det\mathscr{A}\end{aligned}$$

на основу познатих особина детерминанти. Дакле, *детерминанта неког оператора не зависи од избора базиса*! Стога се може увести појам детерминанте $\det\hat{A}$ линеарног оператора $\hat{A}$, пишући $\det\hat{A} = \det\mathscr{A}$, где је $\mathscr{A}$ матрица оператора $\hat{A}$ у било ком базису.

Последица **дефиниције 8.1.** јесте следеће: Ако важи формула (8.1) у којој је $\hat{A}$ несингуларан оператор, биће, полазећи од основне формуле репрезентовања, а на основу израза (7.1) и (7.2)

$$\eta_i = \sum_j a_{ji}\,\xi_j\,, \tag{8.2}$$

где су ξ_i и η_i координате вектора $|v\rangle$ и $|\tilde{v}\rangle$ у датом ортонормираном базису $\{|v_i\rangle\}$. Формула (8.2) може се схватити и као систем нехомогених једначина по ξ_i када су η_i познати. Како је оператор $\hat{A}$ пресликавање $1-1$, систем једначина (8.2) мора имати јединствена решења, стога је обавезно да $\det\mathscr{A} \neq 0$, при чему је $\mathscr{A}$ матрица којом је представљен оператор $\hat{A}$ у базису $\{|v_i\rangle\}$. Али, како је већ било показано да све различите матрице датог оператора (представљеног у различитим базисима) имају исту детерминанту, јасно је да је *детерминанта несингуларног оператора увек различита од нуле*.

Будући да је појам инверзног пресликавања већ коришћен, сада ће бити дефинисан појам инверзног оператора.

Дефиниција 8.2. Нека је $\hat{A} \in \mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ несингуларан оператор; симболом $\hat{A}^{-1}$ биће означен *инверзни оператор* за који важи

$$\hat{A}^{-1}\hat{A}|v\rangle = \hat{A}\hat{A}^{-1}|v\rangle = \hat{I}|v\rangle\,,\quad \forall|v\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A}) \cap \mathbb{D}(\hat{A}^{-1})\,,^{1}$$

а чији је домен једнак рангу полазног оператора $\mathbb{D}(\hat{A}^{-1}) = \mathbb{R}(\hat{A})$.

Инверзни оператор може се дефинисати и као

$$\begin{aligned} |\tilde{v}\rangle &= \hat{A}|v\rangle, \quad \forall|v\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A}) \\ |v\rangle &= \hat{A}^{-1}|\tilde{v}\rangle, \ \ \forall|\tilde{v}\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A}^{-1}) = \mathbb{R}(\hat{A}) \end{aligned}.$$

Очигледно је да је $\hat{A}^{-1}$ линеаран[2] и несингуларан оператор.

Дефиниција 8.3. Оператор $\hat{A}^{\dagger}$ је *адјунгован* оператору $\hat{A}$ ако је домен $\mathbb{D}(\hat{A})$ свуда густ у простору $\mathbb{U}$, и ако важи

$$\left\langle \tilde{v} \middle| \hat{A}v \right\rangle = \left\langle \hat{A}^{\dagger}\tilde{v} \middle| v \right\rangle,\ \ \forall|v\rangle, |\tilde{v}\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A}) \cap \mathbb{D}(\hat{A}^{\dagger})\,. \tag{8.3}$$

---

[1] Што ће рећи да је оператор $\hat{I}^{-1}$ сужење јединичног оператора $\hat{I}$ на оператор који има исти ефекат, али са доменом $\mathbb{D}(\hat{A}) \cap \mathbb{D}(\hat{A}^{-1})$.

[2] Према формули (8.1) у коју се ставе изрази $|\tilde{v}\rangle = \alpha_1|\tilde{v}_1\rangle + \alpha_2|v_2\rangle$ и $|v\rangle = \alpha_1|v_1\rangle + \alpha_2|v_2\rangle$, следе $|\tilde{v}_1\rangle = \hat{A}|v_1\rangle$ и $|\tilde{v}_2\rangle = \hat{A}|v_2\rangle$; тада је $\alpha_1\hat{A}^{-1}|\tilde{v}_1\rangle + \alpha_2\hat{A}^{-1}|\tilde{v}_2\rangle = \alpha_1|v_1\rangle + \alpha_2|v_2\rangle$, те из формуле (8.1) следи $\hat{A}^{-1}|\tilde{v}\rangle = |v\rangle = \alpha_1|v_1\rangle + \alpha_2|v_2\rangle$. Будући да су десна страна првог и десна страна другог израза једнаке, биће $\hat{A}^{-1}\big(\alpha_1|\tilde{v}_1\rangle + \alpha_2|\tilde{v}_2\rangle\big) = \alpha_1\hat{A}^{-1}|\tilde{v}_1\rangle + \alpha_2\hat{A}^{-1}|v_2\rangle$, што значи да је $\hat{A}^{-1}$ стварно линеарни оператор.

У коначно-димензионалном случају оператор $\hat{A}$ свакако је свуда густ пошто је $\mathbb{D}(\hat{A}) = \mathbb{U}^n$. Међутим, у бесконачно-димензионалном случају захтев да буде свуда густ неопходан је због следећег: нека је $\mathbb{D}(\hat{A})$ свуда густ у Хилбертовом простору $\mathbb{H}$, и нека постоје два елемента $|\underline{v}\rangle$ и $|\underline{v}'\rangle$ који задовољавају дефиниционе изразе

$$\begin{matrix} \left\langle \tilde{v} \middle| \hat{A} v \right\rangle = \langle \underline{v} | v \rangle \\ \left\langle \tilde{v} \middle| \hat{A} v \right\rangle = \langle \underline{v}' | v \rangle \end{matrix}, \quad |v\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A}).$$

Тада је $\langle \underline{v}' - \underline{v} | v \rangle = 0$, односно $|\underline{v}'\rangle - |\underline{v}\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A})$, а будући да је $\mathbb{D}(\hat{A})$ свуда густ у $\mathbb{H}$ следи да је $|\underline{v}'\rangle - |\underline{v}\rangle = |0\rangle$, илити $|\underline{v}'\rangle = |\underline{v}\rangle$. Дакле, формула (8.3) из **дефиниције 8.3.** једнозначно одређује оператор $\hat{A}^\dagger$ адјунгован оператору $\hat{A}$ само ако је $\mathbb{D}(\hat{A})$ свуда густ у $\mathbb{H}$. У том случају такође је и $\mathbb{D}(\hat{A}^\dagger)$ свуда густ у $\mathbb{H}$.

Адјунговани оператор $\hat{A}^\dagger$ такође је и линеаран

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{v} \middle| \hat{A}^\dagger \left(\alpha_1 |v_1\rangle + \alpha_2 |v_2\rangle \right) \right\rangle &= \left\langle \hat{A} v \middle| \alpha_1 |v_1\rangle + \alpha_2 |v_2\rangle \right\rangle \\ &= \alpha_1 \left\langle \hat{A} \tilde{v} \middle| v_1 \right\rangle + \alpha_2 \left\langle \hat{A} \tilde{v} \middle| v_2 \right\rangle \\ &= \alpha_1 \left\langle \tilde{v} \middle| \hat{A}^\dagger v_1 \right\rangle + \alpha_2 \left\langle \acute{v} \middle| \hat{A}^\dagger v_2 \right\rangle \\ &= \left\langle \tilde{v} \middle| \left(\alpha_1 \hat{A}^\dagger |v_1\rangle + \alpha_2 \hat{A}^\dagger |v_2\rangle \right) \right\rangle \end{aligned}, \quad \begin{matrix} \forall |\tilde{v}\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A}) \\ \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A}^{-1}) \end{matrix}.$$

Теорема 8.2. Ако је оператор $\hat{A}$ представљен матрицом $\mathscr{A}$ у датом ортонормираном базису у коначно-димензионалном унитарном простору $\mathbb{U}^n$, онда је оператор $\hat{A}^\dagger$ представљен у истом том базису адјунгованом матрицом $\mathscr{A}^\dagger = (\mathscr{A}^*)^{\mathrm{T}}$ (транспонована, са комплексно коњугованим матричним елементима).

Доказ.

Већ је познато да матрица $\mathscr{A}$ у ортонормираном базису $\left\{ |\mathrm{e}_i\rangle, i = \overline{1,n} \right\}$ има матричне елементе који се, према другој варијанти основне формуле репрезентовања (7.4), могу писати као $a_{ij} = \left\langle e_i \,\middle|\, \hat{A} e_j \right\rangle$, или као $a_{ij} = \left\langle \hat{A}^{\dagger} e_i \,\middle|\, e_j \right\rangle = \left\langle e_j \,\middle|\, \hat{A}^{\dagger} e_i \right\rangle^*$. Ако се сада са b_{ij} означе елементи матрице $\mathscr{B}$ која у истом базису репрезентује оператор $\hat{A}^{\dagger}$, биће $b_{ij} = \left\langle e_i \,\middle|\, \hat{A}^{\dagger} e_j \right\rangle^* = a_{ji}^*$, илити $\mathscr{B} = \mathscr{A}^{\dagger}$.

Q.E.D.

Да би **теорема 8.2.** важила у бесконачно-димензионалном случају линеарни оператор $\hat{A}$ мора бити затворен. Затвореност је потребна да би се могла користити линеарност оператора у случају бесконачних сума, тј. интеграљења.

Напомена: Теорема 8.2. важи само за случај ортонормираних базиса, али веза између матрица које репрезентују операторе $\hat{A}$ и $\hat{A}^{\dagger}$ у неортонормираним базисима није толико једноставна.

Адјунговање представља својеврсно уопштавање операције комплексног коњуговања из поља комплексних бројева. Заиста, адјунговање је унарна операција за коју важи

1. $(\hat{A}^{\dagger})^{\dagger} = \hat{A}$ - инволутивност,
2. $(\alpha_1 \hat{A}_1 + \alpha_2 \hat{A}_2)^{\dagger} = \alpha_1^* \hat{A}_1^{\dagger} + \alpha_2^* \hat{A}_2^{\dagger}$ - антилинеарност.

На основу горе поменуте аналогије (између унарне операције адјунговања на скупу оператора у унитарном простору $\mathbb{U}$ и унарне операције комплексног коњуговања) којом се доводе у везу оператори и комплексни бројеви, могуће је дефинисати класе оператора аналогне бројевима који леже на реалној оси: $z^* = z$.

Дефиниција 8.4. У коначно-димензионалним просторима, *ермитски* оператор је оператор за кога важи $\hat{A}^{\dagger} = \hat{A}$.

У бесконачно-димензионалним просторима, ако је $\mathbb{D}(\hat{A}) \subset \mathbb{D}(\hat{A}^{\dagger})$, односно ако је $\hat{A}$ сужење оператора $\hat{A}^{\dagger}$: $\hat{A} \subset \hat{A}^{\dagger}$, каже се да је оператор *ермитски* (*симетричан*), а ако је $\hat{A}^{\dagger} = \hat{A}$ да је *ауто-адјунгован*.

Важно је запазити да и ермитски и ауто-адјунговани оператори морају имати свуда густ домен.

Лема 8.1. Ако је $\hat{A}$ ермитски оператор у КДУП $\mathbb{U}^n$, онда је $\left\langle v \middle| \hat{A}v \right\rangle$ реалан број за свако $|v\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A})$.

Доказ.

$$\hat{A}^\dagger = \hat{A} \Rightarrow \left\langle v \middle| \hat{A}v \right\rangle = \left\langle \hat{A}^\dagger v \middle| v \right\rangle = \left\langle \hat{A}v \middle| v \right\rangle = \left\langle v \middle| \hat{A}v \right\rangle^*,$$

Што значи да је $\left\langle v \middle| \hat{A}v \right\rangle$ реалан број $\forall |v\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A})$.

Q.E.D.

Резултат **леме 8.1.** важи и у случају бесконачно-димензионалних простора и ауто-адјунгованих оператора.

У квантној механици величина $\left\langle v \middle| \hat{A}v \right\rangle \equiv \langle v|\hat{A}|v\rangle$ назива се *очекивана вредност* која представља средњу вредност више мерења дате физичке величине, те је очигледно да као таква мора бити реална.

Значи, оператори који у квантној механици представљају физичке величине морају бити ермитски, односно ауто-адјунговани, да би њихове измерене (очекиване) вредности биле реалне!

Важан подскуп скупа ермитских и ауто-адјунгованих оператора јесу *позитивни оператори*.

Дефиниција 8.5. Оператор $\hat{A}$ из $\mathbb{U}$ је *позитиван* ако је $\left\langle v \middle| \hat{A}v \right\rangle \equiv \langle v|\hat{A}|v\rangle \geq 0$, за сваки $|v\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A})$.

Ако важи да је $\left\langle v \middle| \hat{A}v \right\rangle \equiv \langle v|\hat{A}|v\rangle > 0$, $\forall |v\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A})$, онда је оператор $\hat{A}$ *строго позитиван* (*позитивно дефинитан*).

Како горња два израза имају смисла само ако је $\left\langle v \middle| \hat{A}v \right\rangle \equiv \langle v|\hat{A}|v\rangle$ реално, на основу **леме 8.1.** следи да је позитивни оператор $\hat{A}$ ермитски (ауто-адјунгован). Овакви оператори се записују и као $\hat{A} \geq 0$ и $\hat{A} > 0$, редом.

Позитивни и строго позитивни оператори играју важну улогу у квантној статистичкој физици, где служе за описивање стања система (*статистички оператори*).

8.2. Пројектори

Значајан подскуп ермитских (ауто-адјунгованих) оператора представљају *пројектори*. Према **теореми 6.1**, за сваки потпростор $\mathbb{W}$ унитарног простора $\mathbb{U}$ важи $\mathbb{U} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$, те се сваки вектор $|v\rangle \in \mathbb{D}(\hat{A})$ може једнозначно писати као $|v\rangle = |w\rangle + \left|w^{\perp}\right\rangle$, где су $|w\rangle \in \mathbb{W}$ пројекција и $\left|w^{\perp}\right\rangle \in \mathbb{W}^{\perp}$ нормала, редом.

Оператор $\hat{P}_{\mathrm{W}}$ дефинише се као оператор који произвољном елементу $|v\rangle \in \mathbb{U}$ придружује његову пројекцију $|w\rangle \in \mathbb{W}$: $\hat{P}_{\mathrm{W}}|v\rangle = |w\rangle$. Одмах следи да је $\mathbb{D}(\hat{P}_{\mathrm{W}}) = \mathbb{U}$ и $\mathbb{R}(\hat{P}_{\mathrm{W}}) = \mathbb{W}$ у оба, коначно-димензионалном и бесконачно-димензионалном случају.

Поменути оператор $\hat{P}_{\mathrm{W}}$ је линеарни оператор, јер је

$$\hat{P}_{\mathrm{W}}\left(\alpha_1|v_1\rangle + \alpha_2|v_2\rangle\right) = \alpha_1|w_1\rangle + \alpha_2|w_2\rangle = \alpha_1\hat{P}_{\mathrm{W}}|v_1\rangle + \alpha_2\hat{P}_{\mathrm{W}}|v_2\rangle,$$

за $|v_1\rangle = |w_1\rangle + \left|w_1^{\perp}\right\rangle$, $|v_2\rangle = |w_2\rangle + \left|w_2^{\perp}\right\rangle$, где су $|w_1\rangle, |w_2\rangle \in \mathbb{W}$ и $\left|w_1^{\perp}\right\rangle, \left|w_2^{\perp}\right\rangle \in \mathbb{W}^{\perp}$.

Оператор $\hat{P}_{\mathrm{W}}$ назива се *пројектором*. Његова својства су

1. $\hat{P}_{\mathrm{W}}^2|v\rangle = \left(\hat{P}_{\mathrm{W}}\hat{P}_{\mathrm{W}}\right)|v\rangle = \hat{P}_{\mathrm{W}}\left(\hat{P}_{\mathrm{W}}|v\rangle\right) = \hat{P}_{\mathrm{W}}|w\rangle = |w\rangle = \hat{P}_{\mathrm{W}}|v\rangle$,

што значи да су пројектори *идемпотентни*, $\hat{P}_{\mathrm{W}}^2 = \hat{P}_{\mathrm{W}}$;

2. $$\begin{aligned}\left\langle v_1 \middle| \hat{P}_W^\dagger v_2 \right\rangle &= \left\langle \hat{P}_W v_1 \middle| v_2 \right\rangle = \left\langle w_1 \middle| w_2 + w_2^\perp \right\rangle = \left\langle w_1 \middle| w_2 \right\rangle + \left\langle w_1 \middle| w_2^\perp \right\rangle = \left\langle w_1 \middle| w_2 \right\rangle \\ &= \left\langle w_1 \middle| w_2 \right\rangle + 0 = \left\langle w_1 \middle| w_2 \right\rangle + \left\langle w_1^\perp \middle| w_2 \right\rangle = \left\langle w_1 + w_1^\perp \middle| w_2 \right\rangle = \left\langle v_1 \middle| w_2 \right\rangle = \left\langle v_1 \middle| \hat{P}_W v_2 \right\rangle\end{aligned}$$

одакле је јасно да су пројектори *ермитски* (*ауто-адјунговани*) оператори, $\hat{P}_W^\dagger = \hat{P}_W$.

Поменуте особине могу да послуже и за дефинисање пројектора.

Дефиниција 8.6. Пројектор је свуда дефинисан ермитски (ауто-адјунгован) и идемпотентан линеарни оператор.

За пројекторе, на основу Коши-Буњаковски-Шварцове неједнакости, важи

$$\left\| \hat{P}_W |v\rangle \right\|^2 = \left\langle \hat{P}_W \langle v| \middle| \hat{P}_W |v\rangle \right\rangle = \left\langle v \middle| \hat{P}_W^2 v \right\rangle = \left\langle v \middle| \hat{P}_W v \right\rangle \le \left\| \hat{P}_W |v\rangle \right\| \left\| |v\rangle \right\|,$$

илити

$$\left\| \hat{P}_W |v\rangle \right\| \le \left\| |v\rangle \right\|.$$

Ово значи да је оператор $\hat{P}_W$ ограничен, те је самим тим и непрекидан оператор.

Ако је $\hat{P}_W$ пројектор онда је $\hat{I}\,|v\rangle = \hat{P}_W\,|v\rangle + \hat{P}_{W^\perp}\,|v\rangle$ (**теорема 6.1**). Како ово важи за сваки $|v\rangle \in \mathbb{H}$, може се писати

$$\hat{I} = \hat{P}_W + \hat{P}_{W^\perp}$$

односно

$$\hat{P}_{W^\perp} = \hat{I} - \hat{P}_W .$$

Да је $\hat{P}_{W^\perp}$ такође пројектор види се из следеће две формуле

$$\begin{aligned}\left(\hat{I} - \hat{P}_W\right)^\dagger &= \hat{I}^\dagger - \hat{P}_W^\dagger = \hat{I} - \hat{P}_W \\ \left(\hat{I} - \hat{P}_W\right)^2 &= \left(\hat{I} - \hat{P}_W\right)\left(\hat{I} - \hat{P}_W\right) = \hat{I}^2 - 2\hat{P}_W + \hat{P}_W^2 = \hat{I} - \hat{P}_W\end{aligned}.$$

Дакле, ако је $\hat{P}_W$ пројектор на потпростор $\mathbb{W}$, онда је и $\hat{P}_{W^\perp}$ пројектор на потпростор $\mathbb{W}^\perp$.

Пројектори су *позитивни* оператори

$$\left\langle v \middle| \hat{P}_{\mathrm{W}} v \right\rangle = \left\langle v \middle| \hat{P}_{\mathrm{W}}^{2} v \right\rangle = \left\langle \hat{P}_{\mathrm{W}} v \middle| \hat{P}_{\mathrm{W}} v \right\rangle = \left\| \hat{P}_{\mathrm{W}} \left| v \right\rangle \right\|^{2} \geq 0 .$$

Код пројектора је сасвим свеједно на који од фактора у скаларном производу он делује

$$\left\langle v_1 \middle| \hat{P}_{\mathrm{W}} v_2 \right\rangle = \left\langle v_1 \middle| \hat{P}_{\mathrm{W}}^{2} v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{P}_{\mathrm{W}} v_1 \middle| \hat{P}_{\mathrm{W}} v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{P}_{\mathrm{W}}^{2} v_1 \middle| v_2 \right\rangle = \left\langle \hat{P}_{\mathrm{W}} v_1 \middle| v_2 \right\rangle .$$

Теорема 8.3. Производ два пројектора $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}$ и $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}$ пројектор је онда и само онда ако поменути пројектори *међусобно комутирају*. Тада $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}$ пројектује на пресек потпростора $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$: $\mathbb{R}\left(\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\right) = \mathbb{R}\left(\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\right) \cap \quad \left(\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\right)$, те важи $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2} = \hat{P}_{\mathrm{W}_1 \cap \mathrm{W}_2}$.

Доказ.

Довољност услова

$$\left(\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\right)^2 = \left(\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\right)\left(\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\right) = \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2} = \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_2} = \hat{P}_{\mathrm{W}_1}^2\hat{P}_{\mathrm{W}_2}^2 = \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}$$

и

$$\left(\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\right)^{\dagger} = \hat{P}_{\mathrm{W}_2}^{\dagger}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}^{\dagger} = \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1} = \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2} .$$

Потребност услова

Нека је производ пројектора $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}$ пројектор. Тада важи

$$\left(\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\right)^{\dagger} = \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2} .$$

Исто тако, из чињенице да су $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}$ и $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}$ ермитски (ауто-адјунговани) оператори следи

$$\left(\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\right)^{\dagger} = \hat{P}_{\mathrm{W}_2}^{\dagger}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}^{\dagger} = \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}$$

те, на крају, важи

$$\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1} = \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2} .$$

Нека је $\mathbb{X}$ потпростор у који пројектује оператор $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}$. Нека су дати вектори $|x\rangle \in \mathbb{X}$ и $|v\rangle \in \mathbb{U}$ такви да је $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle = \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle = |x\rangle$, то јест $|x\rangle \in \mathbb{W}_1$ и $|x\rangle \in \mathbb{W}_2$, односно $|x\rangle \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$. Тада је очигледно $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{W}_1 \cap \quad_2$.

С друге стране, нека је $|x\rangle \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$, то јест $|x\rangle \in \mathbb{W}_1$ и $|x\rangle \in \mathbb{W}_2$, због чега ће бити $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|x\rangle = |x\rangle$ и $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|x\rangle = |x\rangle$, те важи да је $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|x\rangle = \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|x\rangle = |x\rangle$, па је $|x\rangle \in \mathbb{X}$. Одатле следи да је $\mathbb{X} \supseteq \mathbb{W}_1 \cap \quad_2$, односно

$$\mathbb{X} = \mathbb{W}_1 \cap \quad_2 .$$

Q.E.D.

Дефиниција 8.7. Пројектори $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}$ и $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}$ су *међусобно ортогонални* ако је

$$\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2} = 0 .$$

Лема 8.2. Два пројектора $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}$ и $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}$ ортогонални су ако и само ако су им потпростори ликова ортогонални.

Доказ.

Нека је $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2} = \hat{0}$ и нека је $|w_1\rangle \in \mathbb{W}_1$ и $|w_2\rangle \in \mathbb{W}_2$, тада важи

$$\langle w_1 | w_2 \rangle = \left\langle \hat{P}_{\mathrm{W}_1} w_1 \middle| \hat{P}_{\mathrm{W}_2} w_2 \right\rangle = \left\langle w_1 \middle| \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2} w_2 \right\rangle = \left\langle w_1 \middle| \hat{0}\, w_2 \right\rangle = \langle w_1 | 0 \rangle = 0 ,$$

што значи да је $\mathbb{W}_1 \perp \mathbb{W}_2$, одакле је јасно да је

$$\left\langle w_1 \middle| \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2} w_2 \right\rangle = \left\langle \hat{P}_{\mathrm{W}_1} w_1 \middle| \hat{P}_{\mathrm{W}_2} w_2 \right\rangle = 0 ,$$

јер је $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|w_1\rangle \in \mathbb{W}_1$ и $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|w_2\rangle \in \mathbb{W}_2$. Пошто изложено важи $\forall |w_1\rangle, |w_2\rangle \in \mathbb{U}$, следи да је тада $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2} = \hat{0}$.

Q.E.D.

Теорема 8.4. *Збир* два пројектора $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$ је пројектор онда и само онда ако су поменути пројектори *међусобно ортогонални*. Тада $\hat{P}_{W_1}+\hat{P}_{W_2}$ пројектује на ортогоналну суму потпростора тих пројектора, $\hat{P}_{W_1}+\hat{P}_{W_2}=\hat{P}_{W_1\oplus W_2}$.

Доказ.

Нека су пројектори $\hat{P}_{W_1}$ и $\hat{P}_{W_2}$ међусобно ортогонални. Збир $\hat{P}_{W_1}+\hat{P}_{W_2}$ очигледно је свуда дефинисан оператор за који важи

1. сума два оператора је идемпотентна

$$\left(\hat{P}_{W_1}+\hat{P}_{W_2}\right)^2=\hat{P}_{W_1}^2+\hat{P}_{W_1}\hat{P}_{W_2}+\hat{P}_{W_2}\hat{P}_{W_1}+\hat{P}_{W_2}^2=\hat{P}_{W_1}+\hat{P}_{W_2};$$

2. сума два оператора је ермитски (ауто-адјунгован) оператор

$$\left(\hat{P}_{W_1}+\hat{P}_{W_2}\right)^\dagger=\hat{P}_{W_1}^\dagger+\hat{P}_{W_2}^\dagger=\hat{P}_{W_1}+\hat{P}_{W_2}.$$

С друге стране, ако је $\hat{P}_{W_1}+\hat{P}_{W_2}$ пројектор, тада је

$$\begin{aligned}\left\||v\rangle\right\|^2 &\geq \left\|\left(\hat{P}_{W_1}+\hat{P}_{W_2}\right)|v\rangle\right\|^2=\left\langle\left(\hat{P}_{W_1}+\hat{P}_{W_2}\right)\langle v|\,\middle|\left(\hat{P}_{W_1}+\hat{P}_{W_2}\right)|v\rangle\right\rangle\\ &=\left\langle\left(\hat{P}_{W_1}+\hat{P}_{W_2}\right)^2\langle v|\,\middle|\,v\right\rangle=\left\langle\left(\hat{P}_{W_1}+\hat{P}_{W_2}\right)\langle v|\,\middle|\,v\right\rangle=\left\langle\hat{P}_{W_1}|v\rangle+\hat{P}_{W_2}\langle v|\,\middle|\,v\right\rangle\\ &=\left\langle\hat{P}_{W_1}\langle v|\,\middle|\,v\right\rangle+\left\langle\hat{P}_{W_2}\langle v|\,\middle|\,v\right\rangle=\left\langle\hat{P}_{W_1}^2\langle v|\,\middle|\,v\right\rangle+\left\langle\hat{P}_{W_2}^2\langle v|\,\middle|\,v\right\rangle\\ &=\left\langle\hat{P}_{W_1}\langle v|\,\middle|\,\hat{P}_{W_1}|v\rangle\right\rangle+\left\langle\hat{P}_{W_2}\langle v|\,\middle|\,\hat{P}_{W_2}|v\rangle\right\rangle\\ &=\left\|\hat{P}_{W_1}|v\rangle\right\|^2+\left\|\hat{P}_{W_2}|v\rangle\right\|^2\end{aligned}\qquad .\qquad (8.4)$$

Нека је $|v\rangle\in\mathbb{U}$ и $\hat{P}_{W_2}|v\rangle=|w_2\rangle$. Ако се у формули (8.4) напише $|w_2\rangle$ уместо $|v\rangle$, биће

$$\left\||w_2\rangle\right\|^2\geq\left\|\hat{P}_{W_1}|w_2\rangle\right\|^2+\left\|\hat{P}_{W_2}|w_2\rangle\right\|^2=\left\|\hat{P}_{W_1}|w_2\rangle\right\|^2+\left\||w_2\rangle\right\|^2$$

одакле следи да је

$$\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|w_2\rangle = |0\rangle \text{ тj. } \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|w_2\rangle = |0\rangle \text{ илити } \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2} = \hat{0}.$$

Осим тога, вектор $\left(\hat{P}_{\mathrm{W}_1} + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\right)|v\rangle$ произвољан је вектор из $\mathbb{R}\left(\hat{P}_{\mathrm{W}_1} + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\right)$, док истовремено $\left(\hat{P}_{\mathrm{W}_1} + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\right)|v\rangle = \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}|v\rangle$ припада $\mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$, дакле следи да је $\mathbb{R}\left(\hat{P}_{\mathrm{W}_1} + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\right) \subseteq \mathbb{W}_1 \oplus \quad_2$.

Обрнуто, из $|v\rangle \in \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$ следи да је $|v\rangle = |w_1\rangle + |w_2\rangle$, $|w_1\rangle \in \mathbb{W}_1$, $|w_2\rangle \in \mathbb{W}_2$, односно $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|w_1\rangle = |w_1\rangle$ и $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|w_2\rangle = |w_2\rangle$, те је

$$\begin{aligned}\left(\hat{P}_{\mathrm{W}_1} + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\right)\left(|w_1\rangle + |w_2\rangle\right) &= \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|w_1\rangle + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}|w_1\rangle + \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|w_2\rangle + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}|w_2\rangle \\ &= |w_1\rangle + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}|w_1\rangle + \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|w_2\rangle + |w_2\rangle \\ &= |w_1\rangle + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|w_1\rangle + \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|w_2\rangle + |w_2\rangle = |w_1\rangle + |w_2\rangle\end{aligned},$$

те ће бити $|w_1\rangle + |w_2\rangle \in \mathbb{R}\left(\hat{P}_{\mathrm{W}_1} + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\right)$ то јест $\mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2 \subseteq \quad \left(\hat{P}_{\mathrm{W}_1} + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\right)$, те испада да је $\mathbb{R}\left(\hat{P}_{\mathrm{W}_1} + \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\right) = \mathbb{W}_1 \oplus \quad_2$.

Q.E.D.

Дефиниција 8.8. Ако за просторе $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ важи да је $\mathbb{W}_1 \subseteq \mathbb{W}_2$, онда је пројектор $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}$ *потпројектор* пројектора $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}$, што се записује као $\hat{P}_{\mathrm{W}_1} \leq \hat{P}_{\mathrm{W}_2}$.

Теорема 8.5. Израз $\hat{P}_{\mathrm{W}_1} \leq \hat{P}_{\mathrm{W}_2}$ важи оннда ако је $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2} = \hat{P}_{\mathrm{W}_1}$.

Доказ.

Нека је $\hat{P}_{\mathrm{W}_1} \leq \hat{P}_{\mathrm{W}_2}$; тада за свако $|v\rangle \in \mathbb{U}$ важи да је $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle \in \mathbb{W}_1 \subseteq \mathbb{W}_2$. Одатле следи да је $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle = \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|v\rangle$, то јест $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1} = \hat{P}_{\mathrm{W}_1}$. На основу последњег израза се види да је производ $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1}$ пројектор, при чему, према **теореми 8.3**, одговарајући пројектори комутирају: $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1} = \hat{P}_{\mathrm{W}_1}$ и $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2} = \hat{P}_{\mathrm{W}_1}$, те следи да је $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \quad_1$, одакле је очигледно $\mathbb{W}_1 \subseteq \mathbb{W}_2$, па је и $\hat{P}_{\mathrm{W}_1} \le \hat{P}_{\mathrm{W}_2}$.

Q.E.D.

Теорема 8.6. Разлика два пројектора $\hat{P}_{\mathrm{W}_2} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}$ пројектор је онда и само онда ако је $\hat{P}_{\mathrm{W}_1} \le \hat{P}_{\mathrm{W}_2}$ ($\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2} = \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1} = \hat{P}_{\mathrm{W}_1}$), при чему пројектор $\hat{P}_{\mathrm{W}_2} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}$ пројектује на ортогоналну разлику потпростора ликова, $\hat{P}_{\mathrm{W}_2} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1} = \hat{P}_{\mathrm{W}_2 - \mathrm{W}_1}$.

Доказ.

Нека је $\hat{P}_{\mathrm{W}_1} \le \hat{P}_{\mathrm{W}_2}$ ($\hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2} = \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1} = \hat{P}_{\mathrm{W}_1}$); тада је

1) идемпотентност

$$\left(\hat{P}_{\mathrm{W}_2} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\right)^2 = \hat{P}_{\mathrm{W}_2}^2 + \hat{P}_{\mathrm{W}_1}^2 - \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2} = \hat{P}_{\mathrm{W}_2} + \hat{P}_{\mathrm{W}_1} - 2\hat{P}_{\mathrm{W}_1} = \hat{P}_{\mathrm{W}_2} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1};$$

2) ермитска симетрија (ауто-адјунгованост)

$$\left(\hat{P}_{\mathrm{W}_2} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\right)^\dagger = \hat{P}_{\mathrm{W}_2}^\dagger - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}^\dagger = \hat{P}_{\mathrm{W}_2} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}.$$

Дакле, разлика $\hat{P}_{\mathrm{W}_2} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}$ јесте пројектор.

С друге стране, ако је $\hat{P}_{\mathrm{W}_2} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}$ пројектор, мора бити

$$\left(\hat{P}_{\mathrm{W}_2} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\right)^2 = \hat{P}_{\mathrm{W}_2} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}$$

што даље даје

$$\hat{P}_{\mathrm{W}_2}^2 + \hat{P}_{\mathrm{W}_1}^2 - \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2} = \hat{P}_{\mathrm{W}_2} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}$$

односно

$$2\hat{P}_{\mathrm{W}_1} = \hat{P}_{\mathrm{W}_2}\hat{P}_{\mathrm{W}_1} + \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\hat{P}_{\mathrm{W}_2}. \tag{8.5}$$

Прво: након множења израза (8.5) слева са $\hat{P}_{\mathbb{W}_2}$, бива

$$\hat{P}_{\mathbb{W}_2}\hat{P}_{\mathbb{W}_1} + \hat{P}_{\mathbb{W}_2}\hat{P}_{\mathbb{W}_1}\hat{P}_{\mathbb{W}_2} = 2\hat{P}_{\mathbb{W}_2}\hat{P}_{\mathbb{W}_1}$$

те је

$$\hat{P}_{\mathbb{W}_2}\hat{P}_{\mathbb{W}_1}\hat{P}_{\mathbb{W}_2} = \hat{P}_{\mathbb{W}_2}\hat{P}_{\mathbb{W}_1}.$$

Друго: множењем израза (8.5) здесна са $\hat{P}_{\mathbb{W}_2}$ даје

$$\hat{P}_{\mathbb{W}_2}\hat{P}_{\mathbb{W}_1}\hat{P}_{\mathbb{W}_2} = \hat{P}_{\mathbb{W}_1}\hat{P}_{\mathbb{W}_2}$$

те важи

$$\hat{P}_{\mathbb{W}_2}\hat{P}_{\mathbb{W}_1} = \hat{P}_{\mathbb{W}_1}\hat{P}_{\mathbb{W}_2}.$$

На основу (8.5) тада следи

$$\hat{P}_{\mathbb{W}_2}\hat{P}_{\mathbb{W}_1} = \hat{P}_{\mathbb{W}_1}\hat{P}_{\mathbb{W}_2} = \hat{P}_{\mathbb{W}_1}$$

то јест

$$\hat{P}_{\mathbb{W}_1} \le \hat{P}_{\mathbb{W}_2}.$$

За доказивање другог дела теореме, нека је $\hat{P}_{\mathbb{W}_2} - \hat{P}_{\mathbb{W}_1} = \hat{P}_{\mathbb{X}}$ и $|x\rangle \in \mathbb{X}$. Тада постоји вектор $|v\rangle \in \mathbb{U}$ такав да важи $\left(\hat{P}_{\mathbb{W}_2} - \hat{P}_{\mathbb{W}_1}\right)|v\rangle = \hat{P}_{\mathbb{W}_2}|v\rangle - \hat{P}_{\mathbb{W}_1}|v\rangle = |x\rangle$. Будући да је $\hat{P}_{\mathbb{W}_1}|v\rangle \in \mathbb{W}_1 \subseteq \mathbb{W}_2$ и $\hat{P}_{\mathbb{W}_2}|v\rangle \in \mathbb{W}_2$ следи да је $|x\rangle \in \mathbb{W}_2$.

Нека је сада $|w_1\rangle \in \mathbb{W}_1$, тако да важи $\hat{P}_{\mathbb{W}_1}|w_1\rangle = |w_1\rangle$ и

$$\begin{aligned}\langle x|w_1\rangle &= \left\langle\left(\hat{P}_{\mathbb{W}_2} - \hat{P}_{\mathbb{W}_1}\right)\langle v|\middle|\hat{P}_{\mathbb{W}_1}|w_1\rangle\right\rangle = \left\langle\hat{P}_{\mathbb{W}_1}\left(\hat{P}_{\mathbb{W}_2} - \hat{P}_{\mathbb{W}_1}\right)\langle v|\middle|w_1\right\rangle \\ &= \left\langle\left(\hat{P}_{\mathbb{W}_1}\hat{P}_{\mathbb{W}_2} - \hat{P}^2_{\mathbb{W}_1}\right)\langle v|\middle|w_1\right\rangle = \left\langle\left(\hat{P}_{\mathbb{W}_1} - \hat{P}_{\mathbb{W}_1}\right)\langle v|\middle|w_1\right\rangle = \left\langle\hat{0}\langle v|\middle|w_1\right\rangle = \langle 0|w_1\rangle = 0\end{aligned}.$$

Дакле, пошто је $|w_1\rangle$ произвољан елемент из $\mathbb{W}_1$, онда је $|x\rangle$ ортогоналан на цео скуп $\mathbb{W}_1$: $|x\rangle \perp \mathbb{W}_1$, а пошто је и $|x\rangle \in \mathbb{W}_2$, следи да он припада ортогоналној разлици скупова $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$: $|x\rangle \in \mathbb{W}_2 - \mathbb{W}_1$, те важи: $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{W}_2 - {}_1$.

С друге стране, нека је $|x\rangle \in \mathbb{W}_2 - \mathbb{W}_1$ (или $|x\rangle \in \mathbb{W}_2$ и $|x\rangle \perp \mathbb{W}_1$). Тада је $\hat{P}_{\mathrm{W}_2}|x\rangle = |x\rangle$ и $\hat{P}_{\mathrm{W}_1}|x\rangle = |0\rangle$, тј. $|x\rangle = \hat{P}_{\mathrm{W}_2}|x\rangle - |0\rangle = \hat{P}_{\mathrm{W}_2}|x\rangle - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}|x\rangle = \left(\hat{P}_{\mathrm{W}_2} - \hat{P}_{\mathrm{W}_1}\right)|x\rangle$, те следи да је $\mathbb{X} \supseteq \mathbb{W}_2 - \quad_1$.

Из свега наведеног је јасно да важи: $\mathbb{X} = \mathbb{W}_2 - \quad_1$.

Q.E.D.

Пример 8.6.1. Идентични оператор $\hat{I}$ је пројектор на цео простор $\mathbb{U}$.

Пример 8.6.2. Нулти оператор $\hat{0}$ је пројектор на нулти потпростор $\{|0\rangle\}$.

Пример 8.6.3. Пројектор на једнодимензионални потпростор $\mathbb{L}(|\mathrm{e}\rangle)$, образован нормираним вектором (ортом) $|\mathrm{e}\rangle$

$$\hat{P}_{\mathbb{L}(|\mathrm{e}\rangle)}|v\rangle = \langle \mathrm{e}|v\rangle|\mathrm{e}\rangle$$ - пројекција вектора $|v\rangle$ дуж орта $|\mathrm{e}\rangle$.

У општем случају, пројектор на потпростор $\mathbb{W}$ образован ортонормираним базисом $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \ldots, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ дат је као

$$\hat{P}_{\mathbb{W}}|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{e}_i|v\rangle|\mathrm{e}_i\rangle .$$

Пример 8.6.4. Сваки нормирани вектор

$$|\mathrm{e}\rangle = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

дефинише један пројектор

$$\hat{P}_{\mathrm{e}} = |\mathrm{e}\rangle|\mathrm{e}\rangle^{\dagger} = |\mathrm{e}\rangle\langle \mathrm{e}|.$$

Заиста

$$\begin{aligned}\hat{P}_e^2 &= \hat{P}_e\hat{P}_e = \left(|e\rangle\langle e|\right)\left(|e\rangle\langle e|\right) = |e\rangle\langle e|e\rangle\langle e| = |e\rangle\langle e| = \hat{P}_e \\ \hat{P}_e^\dagger &= \left(|e\rangle\langle e|\right)^\dagger = \langle e|^\dagger\,|e\rangle^\dagger = |e\rangle\langle e| = \hat{P}_e\end{aligned}.$$

Пројектор $\hat{P}_e$ делује на било који вектор $|v\rangle$ на следећи начин

$$\hat{P}_e|v\rangle = \left(|e\rangle\langle e|\right)|v\rangle = |e\rangle\langle e|v\rangle = \langle e|v\rangle|e\rangle,$$

што значи да пројектор $\hat{P}_e$ пројектује на орт $|e\rangle$.

8.3. Унитарни и антиунитарни оператори

У **потпоглављу 8.1.** уведени су ермитски (ауто-адјунговани) оператори као аналогон реалних бројева; на овом месту биће уведени аналогони бројева на јединичном кругу: $z^* = z^{-1}$.

Дефиниција 8.9. *Унитарни оператор* $\hat{U}$ је пресликавање простора $\mathbb{U}$ у простор $\mathbb{U}$, такво да важи

$$\left\langle \hat{U}v_1 \middle| \hat{U}v_2 \right\rangle = \langle v_1|v_2\rangle, \quad \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbb{D}(\hat{U}).$$

Уочљиво је да унитарни оператор преводи ортонормиран базис $\{|e_i\rangle\}$ у ортонормиран базис $\{\hat{U}|e_i\rangle\}$

$$\left\langle \hat{U}e_i \middle| \hat{U}e_j \right\rangle = \langle e_i \,|\, e_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Дакле, према **теореми 8.1.** унитарни оператор $\hat{U}$ је регуларан (несингуларан).

С друге стране, такође је

$$\left\langle \hat{U}v_1 \middle| \hat{U}v_2 \right\rangle = \left\langle v_1 \middle| \hat{U}^\dagger\hat{U}\,v_2 \right\rangle = \langle v_1|v_2\rangle, \quad \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbb{D}(\hat{U})$$

односно

$$\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I}. \tag{8.6a}$$

У коначно-димензионалном случају важи и

$$\hat{U}\hat{U}^{\dagger} = \hat{I}\ . \tag{8.6б}$$

Формуле (8.6а,б) често се користе као дефиниционе формуле унитарних оператора.

Премда у коначно-димензионалном случају особина $\hat{U}^{\dagger}\hat{U} = \hat{I}$ за последицу има $\hat{U}\hat{U}^{\dagger} = \hat{I}$, у бесконачно-димензионалном случају неопходно је да буду испуњене обе особине истовремено да би оператор био унитаран.

Контра-пример. Бесконачна матрица $\mathscr{A}$ која има свуда нуле, а имагинарне јединице испод главне дијагонале. Тада је $\mathscr{A}^{\dagger}\mathscr{A} = \mathscr{I}$, а $\mathscr{A}\mathscr{A}^{\dagger} \neq \mathscr{I}$, јер је $a_{11} = 0$.

Занимљиво својство унитарних оператора јесте да они *чувају норму* елемената простора у коме делују

$$\left\|\hat{U}\,|v\rangle\right\| = \sqrt{\left\langle \hat{U}v \middle| \hat{U}v \right\rangle} = \sqrt{\langle v|v\rangle} = \left\||v\rangle\right\| .$$

Дефиниција 8.10. Антиунитарни оператори су антилинеарни оператори који не чувају скаларни производ, већ га преводе у комплексно коњугован

$$\left\langle \hat{A}v_1 \middle| \hat{A}v_2 \right\rangle = \langle v_1|v_2\rangle^*,\quad \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbb{D}(\hat{U})\ .$$

Антиунитарни оператори, као и унитарни, чувају норму вектора

$$\left\|\hat{A}|v\rangle\right\| = \sqrt{\left\langle \hat{A}v \middle| \hat{A}v \right\rangle} = \sqrt{\langle v|v\rangle^*} = \sqrt{\left(\langle v|v\rangle^*\right)^*} = \sqrt{\langle v|v\rangle} = \left\||v\rangle\right\| .$$

У **дефиницији 8.10.** је речено да су антиунитарни оператори такође и антилинеарни

$$\hat{A}\left(\alpha_1|v_1\rangle + \alpha_2|v_2\rangle\right) = \alpha_1^*\hat{A}|v_1\rangle + \alpha_2^*\hat{A}|v_2\rangle\ .$$

Због особине да чувају норму вектора, антиунитарни оператори се користе у квантној механици за представљање операције временске инверзије.